

Il problema elastico

Occorre un riassunto dei tre "ingredienti" che ci servono per poter procedere:

- equazioni di congruenza (cinematica):

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbb{D} \underline{u} \text{ in } V \quad 6 \text{ equazioni}$$

$$u_x = \bar{u}_x \text{ in } S_u$$
- equazioni di equilibrio (statica):

$$\mathbb{D}^* \underline{\underline{\sigma}} = \underline{b} \text{ in } V \quad 3 \text{ equazioni}$$

$$\mathbb{N} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} \text{ in } S_f$$
- equazioni di legame (dirette):

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} \underline{\underline{\epsilon}} \quad 6 \text{ equazioni}$$

Abbiamo quindi quindici equazioni in quindici incognite:

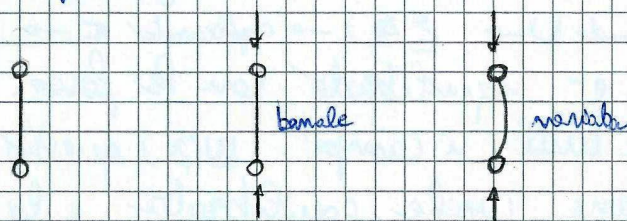
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Non è detto che la soluzione esista e sia unica. Esistenza e unicità sono garantite dal teorema di Kirchhoff.

Le ipotesi che ci permettano di scrivere le equazioni del problema elastico sono:

- congruenza: piccoli gradienti di spostamenti $\Rightarrow$ piccole deformazioni $\underline{\underline{\epsilon}}$.
- equilibrio: piccoli spostamenti e piccoli gradienti di spostamenti $\Rightarrow$ equilibrio in configurazione di riferimento indeformata.

Un esempio in cui la soluzione non è unica è quello dell'asta compressa:



Bisogna considerare gli effetti deformabili nell'equilibrio

è il caso Buckling.

Torniamo al teorema di Kirchhoff e supponiamo per $\square$

amando che esistano, per gli stessi carichi, due soluzioni diverse:

$$(\underline{u}_1, \underline{\sigma}_1, \underline{\varepsilon}_1)$$

$$(\underline{u}_2, \underline{\sigma}_2, \underline{\varepsilon}_2)$$

Con carichi $(\underline{b}, \underline{f})$. Per la linearità del problema deve pure essere soluzione:

$$(\underline{u} = \underline{u}_2 - \underline{u}_1, \underline{\sigma} = \underline{\sigma}_2 - \underline{\sigma}_1, \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_2 - \underline{\varepsilon}_1)$$

Ne segue che $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ è un campo congruente ai cedimenti $\underline{b}$ e $\underline{f}$ e $\underline{\sigma}$ è un campo equilibrato con $(\underline{b}, \underline{f}) = (\underline{0}, \underline{0})$.

Vali l'identità dei lavori virtuali e si può scrivere:

$$\int_{\Omega} \underline{b}^T \cdot \underline{u} \, dV + \int_{\partial\Omega} \underline{f}^T \cdot \underline{u} \, dS + \int_{\partial\Omega} \underline{\tau} \cdot \underline{u} \, dS = \int_V \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon} \, dV$$

$$\Rightarrow \int_V \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon} \, dV = 0$$

Dalla l'identità $(\underline{u}, \underline{b}, \underline{f}) = (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})$. Il risultato ottenuto è impossibile a meno che non si abbia $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$. Recuperando la densità di energia potenziale elastica e:

$$e = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon} \Rightarrow 2 \int_V e \, dV = 0 \Leftrightarrow \underline{\varepsilon} = \underline{0}$$

buttando e e è definita positiva, $e > 0 \, \forall \, \underline{\varepsilon} \neq \underline{0}$. È nulla solo se $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$. Necessariamente $\underline{\varepsilon}_1 = \underline{\varepsilon}_2$, da cui $\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_2$.

Per deformazioni e tensioni la soluzione è unica, ma può non esserlo per spostamenti. Infatti gli spostamenti sono uguali a meno di una costante rigida:

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_1 + \underline{u}_{rigido}$$

Imponendo opportuni vincoli esterni si evita l'inconveniente.

Metodi degli spostamenti e delle tensioni

Per risolvere il problema elastico abbiamo due metodi, quello degli spostamenti e quello delle tensioni.

Il primo è il principale. Prendiamo un campo di spostamenti $\underline{u}(\underline{x})$ cinematicamente ammissibile. Seguono:

$$\underline{u}(\underline{x}) \xrightarrow{\text{applicando D}} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \xrightarrow{\text{applicando C}} \underline{\sigma}(\underline{x})$$

In generale $\underline{\sigma}(\underline{x})$ non è equilibrato con le forze $\underline{b}(\underline{x})$ e $\underline{f}(\underline{x})$. Scegliamo allora tra tutti i campi $\underline{u}(\underline{x})$ quello che conduce a una configurazione anche equilibrata e lo leggiamo alle forze $\underline{b}(\underline{x})$ tramite $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} \underline{u} = \underline{b}$$

Inoltre abbiamo:

$$\underline{\underline{E}} = D \underline{\underline{u}} \Rightarrow \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}} D \underline{\underline{u}} \Rightarrow \underline{\underline{b}} = D^* \underline{\underline{G}} = D^* \underline{\underline{C}} D \underline{\underline{u}}$$

Ricordando $K \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{b}}$, notiamo che $K = D^* \underline{\underline{C}} D$. K è detto operatore di rigidità, $\underline{\underline{G}}$ è lo stress differenziale e fornisce le equazioni di Navier ($D^* \underline{\underline{C}} D \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{b}}$)

Al contorno, sulla superficie S si usa:

$$N \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{f}} \Rightarrow N \underline{\underline{C}} D \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{f}} \text{ su } S_f$$

Il metodo degli spostamenti fornisce quindi equazioni di equilibrio in termini di spostamenti. Il processo risolutivo è:

$$\underline{\underline{u}} \rightsquigarrow \underline{\underline{E}} \rightsquigarrow \underline{\underline{G}}$$

congruenza legame

Passiamo al metodo delle tensioni. Le incognite sono proprio le tensioni:

$$D^* \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{b}}$$

Dato l'indeterminazione del sistema (3 equazioni in 6 incognite) abbiamo infiniti campi $\underline{\underline{G}}(x)$ equilibrati con le forze $\underline{\underline{b}}(x)$ e $\underline{\underline{f}}(x)$. O un campo $\underline{\underline{G}}(x)$ equilibrato e associato un campo deformabile $\underline{\underline{E}}(x)$. Quest'ultimo, ma tuttavia può non essere compatibile, cioè non fornire un campo $\underline{\underline{u}}(x)$ congruente. Cerco allora, tra tutti gli stati equilibrati, quello che origina una configurazione anche compatibile.

Possiamo formulare in due modi le equazioni di riduzione. Ma scegliamo di considerare le sei equazioni esplicite di congruenza, $S^* \underline{\underline{E}} = 0$, che in forma indiciale avremo i quattro indici i, j, h, k . Se introduco H e si scrive in modo inverso:

$$\underline{\underline{E}} = H \underline{\underline{G}} \Rightarrow \text{equilibrio}$$

Si ottengono sei equazioni indipendenti nelle $\underline{\underline{G}}$ di congruenza in termini di tensioni. Sono dette equazioni di Beltrami-Mitchell e sono:

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}_0 + S \underline{\underline{X}}$$

Con $\underline{\underline{G}}_0$ soluzione particolare del problema non omogeneo e $\underline{\underline{X}}$ vettore delle funzioni di tensione (che nelle trazioni corrisponde al ruolo delle ipostatiche).

Lo stato di deformazione corrispondente è:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{H} \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \mathbb{H} \mathbb{S} \underline{\underline{X}}$$

Per la compatibilità cinematica $\mathbb{S}^* \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$, perciò in V :

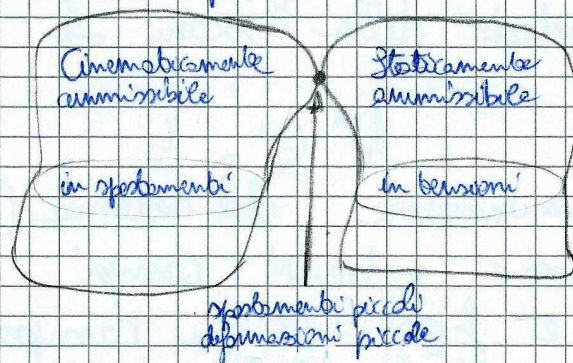
$$\mathbb{S}^* \mathbb{H} \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \mathbb{S}^* \mathbb{H} \mathbb{S} \underline{\underline{X}} = 0$$

Con l'operatore di flessibilità $\mathbb{F} = \mathbb{S}^* \mathbb{H} \mathbb{S}$ e l'autotensione $\underline{\underline{G}}_0 = \mathbb{S} \underline{\underline{\varepsilon}}_0$.
Inoltre sulla superficie S_F :

$$\mathbb{N} \underline{\underline{G}}_0 + \mathbb{N} \mathbb{S} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{f}}$$

Le ultime due equazioni sono analoghe a quelle di Muller-Bredau per la trave. La riduzione è di congruenza in termini di tensione.

Esistono quindi due mondi che si incontrano solo nel caso di deformazioni e spostamenti piccoli:



La formulazione variazionale

Tra tutti i campi $\underline{\underline{u}}$ ammissibili abbiamo scelto il solo che rende il problema equilibrato: è il punto di stazionarietà di Π . Per un problema lineare vale quindi il principio di minimo. Π è la seguente somma di integrali:

$$\Pi := \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{Q}} dV - \int_V \underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{u}} dV - \int_{S_F} \underline{\underline{f}}^T \underline{\underline{u}} dS$$

Cioè è l'energia potenziale totale del continuo. Il primo termine è l'energia potenziale elastica, gli ultimi due rappresentano il lavoro dei carichi.

Abbiamo affrontato in precedenza la formulazione differenziale del problema classico. Quella qui sopra è invece la formulazione variazionale.